

معادلات تابعی

آموزشی

کلید واژه

معادلات تابعی، معادله کوشی، روش ضرایب نامعین



صادق جهانی پور*
دبیر ریاضی از استان قم

تعریف

معادلات تابعی معادلاتی هستند که در آن‌ها، مجهول یک تابع حقیقی است. برای حل چنین معادلاتی سعی می‌کنیم که به وسیله شرط داده شده آن تابع را جست‌وجو کنیم. معادلات تابعی راه‌حل عمومی ندارند، ولی در این مطلب بعضی از حالت‌های خاص را بررسی می‌کنیم.

روش‌های حل معادلات تابعی دارای یک متغیر: روش تغییر متغیر

با استفاده از این روش، متغیر مستقل معادله را با متغیر دیگری جای‌گزین می‌کنیم، به‌طوری که معادله جدید به‌دست آمده، ما را به سمت تابع اصلی هدایت کند.

مثال ۱. اگر $2 - 5w + w^2 = f(w + 7)$ باشد، آن‌گاه $f(x)$ را پیدا کنید.

حل: فرض کنیم $w + 7 = m$ باشد. در این صورت $m - 7 = w$. با جایگزینی این مقدار در معادله داریم:

$16 - 9m + m^2 = 2 + (m - 7)^2 + 5(m - 7)$
می‌دانیم در نوشتن ضابطه یک تابع، متغیر مستقل یک حرف دلخواه است و لذا می‌توانیم بنویسیم: $16 - 9w + w^2 = f(w)$.

مثال ۲. با فرض $\frac{1}{w} + \frac{w+1}{w^2} = \frac{f(w+1)}{w}$ ، تابع $f(x)$ را پیدا کنید.

حل: اگر $m = \frac{w+1}{w}$ ، آن‌گاه $w = \frac{1}{m-1}$ و لذا:

$$1 - m + m^2 = \frac{1}{\frac{1}{m-1}} + \frac{(\frac{1}{m-1})^2 + 1}{(\frac{1}{m-1})^2} = \frac{1}{m-1} + \frac{1}{(\frac{1}{m-1})^2}$$

بنابراین: $1 - w + w^2 = f(w)$.

مثال ۳. اگر $1 + w + w^2 = f(w)$ باشد، با شرط $x > 0$ پیدا کنید ضابطه $f(x)$ را.

حل: با در نظر گرفتن $t = \log x$ خواهیم داشت: $1 + 0.4 = w$

و بنابراین: $1 + 0.4 + 1.6 = 1 + 0.2 + 1.0 + 1 = f(1.4)$

$$\Rightarrow f(w) = 1 + 0.9 + 1.9$$

به‌طور کلی اگر $f(g(x)) = h(x)$ و $g(x)$ یک تابع معکوس‌پذیر باشد، آن‌گاه با جایگزینی x با $g^{-1}(x)$ خواهیم داشت: $f(x) = h(g^{-1}(x))$.

معادلات تابعی هم‌زمان

اغلب بعد از تغییر متغیر، به معادلات تابعی هم‌زمان می‌رسیم. به عبارت دیگر سعی می‌کنیم با تشکیل یک معادله دیگر در کنار معادله اصلی، به یک دستگاه معادلات برسیم و در نهایت با حذف یکی از تابع‌های مجهول، تابع اصلی را به‌عنوان جواب معادله پیدا کنیم.

مثال ۴. فرض کنید $1 + 2w = f(w) + 2f(w)$ باشد، ضابطه تابع $f(x)$ را بیابید.

حل: اگر $m = w$ باشد، آن‌گاه $m = -w$ و لذا با جایگزینی در معادله داریم:

$$1 + 2m = f(m) + 2f(-m)$$

یا

$$1 + 2w = f(w) + 2f(-w) \quad (*)$$

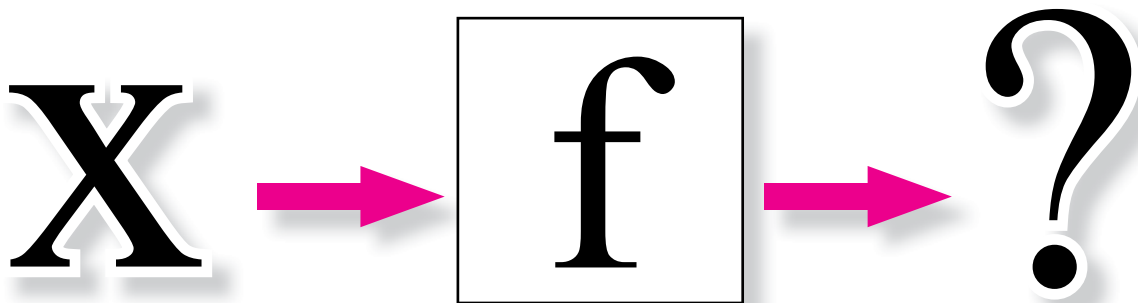
حال با ضرب معادله (*) در -2 و جمع آن با معادله سؤال داریم:

$$-1 + 6w = f(w) - 2f(-w) + 2f(-w) = f(w) - 2f(-w) + 2f(-w) = f(w) - 2f(-w) + 2f(-w)$$

$$\Rightarrow f(w) = -\frac{6w-1}{3}$$

مثال ۵. اگر $1 + w = f(w) + \frac{f(w-1)}{w}$ باشد، تابع $f(x)$ را پیدا کنید.

حل: فرض کنیم $m = \frac{w-1}{w}$ باشد. در این صورت $m = \frac{1}{1-w}$



خواهد شد. با جایگزینی در معادله داریم:

$$\left(\frac{1}{1-m}\right) + f(m) = 1 + \frac{1}{1-m} \quad (*)$$

یا

$$\left(\frac{1}{1-w}\right) + f(w) = 1 + \frac{1}{1-w} \quad (1)$$

مجدداً با فرض $m = \frac{1}{1-w}$ با جایگزینی در معادله (*) خواهیم داشت:

$$\left(\frac{1-w}{w}\right) + f\left(\frac{1}{1-w}\right) = 1 + \frac{1-w}{w} \quad (2)$$

حال مجموع معادلات سؤال و (1) و (2) را حساب و آن را بر دو تقسیم می‌کنیم. در این صورت معادله زیر را پیدا می‌کنیم:

$$\left(\frac{1-w}{w}\right) + f\left(\frac{1}{1-w}\right) + \left(\frac{1}{1-w}\right) + f(w) = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{1}{1-w} + \frac{1-w}{w}\right) + (w + 1) \quad (3)$$

اگر معادله (2) را از معادله (3) کم کنیم، خواهیم داشت:

$$f(w) = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{1}{1-w} + \frac{1-w}{w}\right) - \left(1 + \frac{1-w}{w}\right) = \frac{-w^2 + w^2 + 1}{2w(1-w)}$$

■ روش ضرایب نامعین

در این گونه معادلات تابع مجهول یک تابع چندجمله‌ای فرض می‌شود. برای حل کافی است ضرایب جملات آن را با استفاده از شرایط مسئله تعیین کنیم.

مثال ۶. اگر $f(x)$ یک تابع چندجمله‌ای درجه دوم و $3 + 8w = f(w) - f(w+1)$ و $f(0) = 5$ باشد، ضابطه آن را تعیین کنید.

حل: فرض کنیم $f(w) = aw^2 + bw + c$ باشد، آن‌گاه:

$$3 + 8w = aw^2 + bw + c - [a(w+1)^2 + b(w+1) + c]$$

پس از ساده کردن خواهیم داشت: $3 + 8w = 8w - 2a - b$

با مقایسه کردن طرفین به دست می‌آوریم: $4 = c$ و $-1 = c$. از طرف دیگر داریم: $5 = f(0)$. لذا:

$$5 = f(0) = 4 - 1 \Rightarrow f(w) = 4w^2 - w + 4$$

■ معادلات تابعی با بیشتر از یک متغیر

برای حل چنین معادلاتی، علاوه بر روش‌های بالا می‌توانیم مقادیر خاصی را نیز در معادله جایگزین کنیم. اغلب با جایگزینی $0 = 0 = 0$ در شرایط داده شده، نتایج دیگری از سؤال پیدا می‌کنیم. مثال‌های زیر این روش را به خوبی توضیح می‌دهند.

مثال ۷. فرض کنید $f: Q \rightarrow Q$ تابعی باشد که در شرایط زیر صدق کند:

$$f(1) = 2 \quad (\text{الف})$$

(ب) برای هر $x, y \in Q$ داشته باشیم:

$$1 + f(x+y) = f(x) + f(y) + f(0)$$

ضابطه f را بیابید.

حل: فرض کنیم $0 = 1$ باشد. در این صورت:

$$1 + f(1+1) = f(1) + f(1) + f(0) \Rightarrow 1 + f(2) = 2 + 2 + 1 \Rightarrow f(2) = 4$$

با استفاده مجدد از شرط (الف) و استقرای ریاضی درمی‌یابیم که برای هر x صحیح، $1 + 0 = f(x) \Rightarrow f(x) = x + 1$ است. حال اگر x به صورت عدد گویای $\frac{k}{r}$ که $k, r \in \mathbb{Z}$ و $r \neq 0$ باشد، آن‌گاه می‌توانیم با جایگزینی $\frac{k}{r} = 0$ و $0 = \frac{k}{r}$ در معادله سؤال، رابطه زیر را پیدا کنیم:

$$1 + f\left(\frac{k}{r} + \frac{k}{r}\right) = f\left(\frac{k}{r}\right) + f\left(\frac{k}{r}\right) + f\left(\frac{k}{r}\right)$$

$$1 + f\left(\frac{2k}{r}\right) = 3f\left(\frac{k}{r}\right) \Rightarrow f\left(\frac{2k}{r}\right) = 3f\left(\frac{k}{r}\right) - 1$$

از طرف دیگر می‌دانیم برای هر $x \in \mathbb{Z}$ داریم: $1 + f(x+1) = f(x) + f(1) + f(0)$ لذا $1 + f\left(\frac{k}{r} + 1\right) = f\left(\frac{k}{r}\right) + 2 + 1$ با جایگزینی این مقدار در رابطه بالا خواهیم داشت:

$$1 + f\left(\frac{k}{r} + 1\right) = f\left(\frac{k}{r}\right) + 3 \Rightarrow f\left(\frac{k}{r} + 1\right) = f\left(\frac{k}{r}\right) + 2$$

ملاحظه می‌کنیم به ازای هر $x \in Q$ نیز ضابطه $1 + 0 = f(x)$ را به دست می‌آوریم.

نکته: در این مثال ملاحظه می‌کنیم که ابتدا معادله را

است، پس:

$$(2) \quad (f(x))^2 + (f(x))^2 = (f(x))^2 + (f(x))^2$$

از معادلات (۱) و (۲)، تساوی $(f(x))^2 = 0$ را پیدا می‌کنیم و از آنجا خواهیم داشت:

$$f(x) = \pm x$$

نکته: در این سؤال ما به جای متغیر مستقل، موارد دیگری را جایگزین کردیم. برخی از این جایگزینی‌های رایج عبارت‌اند از $f(x)$ به جای x و یا $(f(x))^2$ به جای x . همچنین می‌توانیم مقادیر $0 = 0$ یا $0 = 0$ و یا حتی $1 = 0$ و ... را نیز در نظر بگیریم.

چند معادله تابعی مشهور

۱. اگر f یک تابع پیوسته باشد، به گونه‌ای که:
 $(f(x) + f(y))^2 = f(x)^2 + f(y)^2$ برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ برقرار باشد،
 آن‌گاه داریم: $f(x) = cx$ که در آن c ثابت است (معادله کوشی).
 ۲. اگر f یک تابع پیوسته باشد و برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$(الف) \quad (f(x) + f(y))^2 = f(x)^2 + f(y)^2, \quad \text{آن‌گاه: } f(x) = x^2$$

$$(ب) \quad (f(x) + f(y))^2 = f(x)^2 + f(y)^2, \quad \text{آن‌گاه: } f(x) = x^2$$

$$(ج) \quad (f(x) + f(y))^2 = f(x)^2 + f(y)^2, \quad \text{آن‌گاه: } f(x) = x^2$$

که در آن c ثابت است.

مثال ۱۰. اگر f یک تابع حقیقی باشد و به ازای هر $x, y > 1$ داشته باشیم: $(f(x) + f(y))^2 = f(x)^2 + f(y)^2$ ، ضابطه تابع f را بیابید.

حل: دو طرف معادله داده شده را بر xy تقسیم می‌کنیم. در این صورت رابطه $\frac{(f(x) + f(y))^2}{xy} = \frac{f(x)^2}{xy} + \frac{f(y)^2}{xy}$ را به دست می‌آوریم. با فرض $\frac{(f(x) + f(y))^2}{xy} = \frac{f(x)^2}{xy} + \frac{f(y)^2}{xy}$ ، تساوی $(f(x) + f(y))^2 = f(x)^2 + f(y)^2$ را نتیجه خواهیم گرفت. از معادلات تابعی مشهور که در بالا آمده است نتیجه می‌گیریم که:
 $f(x) = x^2$ و $f(x) = 0$ و لذا: $f(x) = x^2$.

در حالت خاص $x \in \mathbb{Z}$ و سپس آن را در حالت کلی‌تر حل کردیم. $f(x)$ را در حالت $x \in \mathbb{Q}$ پیدا کردیم. این روش را می‌توانیم در بسیاری از موارد به کار گیریم. در حالت $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ نیز به طور مشابه چنین می‌کنیم. یعنی ابتدا معادله را برای $x \in \mathbb{Z}$ حل می‌کنیم و سپس $f(x)$ را با شرط $x \in \mathbb{Q}$ با جایگزینی $\frac{p}{q}$ می‌یابیم. در نهایت برای توابع پیوسته می‌توانیم f را برای $x \in \mathbb{R}$ پیدا کنیم.

مثال ۸. برای هر x و y ($|x| \neq |y|$) داریم:

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2).$$

ضابطه f را بیابید.

حل: از رابطه سؤال می‌توانیم نتیجه زیر را بگیریم:

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$$

$$\Rightarrow \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

این تساوی نشان می‌دهد که برای هر x ، $\frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ مقداری ثابت دارد. اگر $\frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 0$ باشد، آن‌گاه:
 $f(x) = x^3$.

نکته: در این مثال با یک حالت تقارنی مواجه شدیم. با به دست آوردن این تقارن به یک معادله تابعی با یک متغیر رسیدیم. این روش می‌تواند برای معادلات تابعی متقارن استفاده شود.

مثال ۹. اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ در شرط $(f(x) + f(y))^2 = f(x)^2 + f(y)^2$ صدق کند، ضابطه f را بیابید.
 حل: با قرار دادن $x = 0$ در معادله داریم: $(f(x) + f(0))^2 = f(x)^2 + f(0)^2$. حال از طرفین رابطه داده شده در صورت سؤال f می‌گیریم خواهیم داشت:

$$(1) \quad (f(x) + f(0))^2 = f(x)^2 + f(0)^2 \Rightarrow f(x) + f(0) = \pm \sqrt{f(x)^2 + f(0)^2}$$

۱. تابع $f(x)$ را با هریک از شرایط زیر پیدا کنید:

$$(الف) \quad f(x) = x^2 + 4x + 6$$

$$(ب) \quad f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 2$$

$$(ج) \quad f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 2 \quad (x > 0)$$

$$(د) \quad f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 2 \quad (x > 0)$$

$$(ه) \quad f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 2 \quad (x > 0)$$

$$(و) \quad f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 2 \quad (x > 0)$$

۲. همه توابع $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ را پیدا کنید به گونه‌ای که:

$$(الف) \quad f(1) = 1$$

$$(ب) \quad \text{برای هر } x, y \in \mathbb{Z}$$

$$(f(x) + f(y))^2 = f(x)^2 + f(y)^2$$

۳. پیدا کنید همه توابع $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ که برای هر $x, y \in \mathbb{R}^+$ در رابطه

$$(f(x) + f(y))^2 = f(x)^2 + f(y)^2$$
 صدق می‌کنند (انتخابی المپیاد

بین‌المللی ریاضی در اسلونی ۲۰۰۵).

۴. تابع حقیقی f را پیدا کنید، به طوری که $(f(x) + f(y))^2 = f(x)^2 + f(y)^2$

برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ برقرار باشد (مسابقات ریاضی بالکان ۲۰۰۰).

